UC3M

Matemáticas para la Economía

Examen Final, 26/06/2014 **RESUELTO**

$\boxed{1}$

Dados los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & -2y & +z & +2t & = & 10 \\ 2x & -3y & +4z & -2t & = & 20 \\ x & -y & +az & +bt & = & 20 \end{array} \right.$$

(a) (6 puntos) Discutir el sistema según los valores de los parḿetros a y b.

(b) (4 puntos) Resolver el sistema cuando $a = 3$ y $b = 1$.

Solución:

(a) Realizamos transformaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 20 \\ 1 & -1 & a & b & 20 \end{array} \right),$$

hasta encontrar la matriz escalonada equivalente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 20 \\ 1 & -1 & a & b & 20 \end{array} \right) \overset{\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & b-2 & 10 \end{array} \right) \overset{f_3-f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & b+4 & 10 \end{array} \right).$$

Notemos que el rango de la matriz ampliada es siempre 3, independientemente de los valores de a y de b. Así, tenemos dos casos:

- Si la última fila de la matriz del sistema, A, es de ceros, lo que sucede cuando $a = 3$ y $b = -4$, entonces el rango de la matriz A es 2, por lo que el sistema es incompatible.
- Si la última fila de A es distinta de 0, lo que sucede cuando $a \neq 3$ o $b \neq -4$, entonces el rango de la matriz del sistema y el de la ampliada coinciden, por lo que el sistema es compatible indeterminado, puesto que el rango es 3, menor que el número de variables.

(b) Cuando $a = 3$ y $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sea $z = \lambda$ el parámetro. El sistema escalonado equivalente es

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -2y & +2t & = & 10-\lambda \\ & y & -6t & = & -2\lambda \\ & & 5t & = & 10 \end{array} \right. .$$

Las soluciones son $(x = 30 - 5\lambda, y = 12 - 2\lambda, z = \lambda, t = 2)$.

$\boxed{2}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, no simultáneamente nulos, se considera la matriz A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix}.$$

(a) (5 puntos) Determine para qué valores de x y de y existe la inversa de A y hállela cuando sea posible.

(b) (5 puntos) Determine si existen matrices A de la forma definida más arriba que verifican

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En caso de que existan, hállelas.

Solución:

(a) El determinante de A es $|A| = y^2 - x^2$, que es diferente de 0 sii $x^2 \neq y^2$, lo que es equivalente a $x \neq y$ y $x \neq -y$. Luego A tiene inversa sii $x - y \neq 0$ y $x + y \neq 0$. En este caso, la inversa es

$$\frac{1}{y^2 - x^2} \begin{pmatrix} -x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

(b) Notar que

$$AA^t = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sii

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones son $(x = 0, y = \pm 1)$ y $(y = 0, x = \pm 1)$. Hay 4 matrices solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) (5 puntos) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}$ (no sólo en el punto $x = 0$) y hallar todas sus asíntotas.

(b) (5 puntos) Hallar todos los puntos críticos de f y determinar los extremos locales de f.

Solución:

(a) La función es continua en $x \neq 0$, ya que está dada por funciones racionales cuyo denominador no se anula, pues $1 + x > 0$ si $x > 0$ y $1 + x^2$ es siempre positivo. En $x = 0$ la función no es continua, pues $f(0) = 1$, pero $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. De hecho, no existe el límite de f en $x = 0$. En cuanto a las asíntotas, carece de verticales, por la razón expuesta más arriba. Dado que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$$

$y = 0$ es asíntota horizontal en $x = -\infty$. Por otra parte, como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador de f cuando $x > 0$, es claro que presenta una asíntota oblicua en $x = +\infty$. Para hallarla, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x}{x+1} = 0.$$

luego $y = x$ es asíntota oblícula en $x = +\infty$.

(b) Dado que la función no es continua en $x = 0$, tampoco es derivable en ese punto, luego $x = 0$ es punto crítico. Si $x \neq 0$, entonces f es derivable, con derivada

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

cuando $x < 0$ y

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

cuando $x > 0$. En el primer caso, $f'(x) = 0$ sii $x = \pm 1$, pero tenemos que descartar $x = 1$. En el segundo caso, $f'(x) = 0$ sii $x = 0$ o $x = -2$. Ninguna de las dos son posibilidades válidas. Resumiendo, los puntos críticos de f son $x = 0$ y $x = -1$. Para saber el carácter de $x = -1$, notamos que $f' < 0$ a la izquierda y $f' > 0$ a la derecha de -1 $(x < 0)$, luego $x = -1$ es un mínimo local. En cuanto a $x = 0$, $f(0) = 1 > 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $f' > 0$ a la derecha de 0; quiere esto decir que la función es creciente en $(0, \infty)$. En consecuencia, $x = 0$ no es extremo de f.

$\boxed{4}$

(a) (5 puntos) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+4}-2}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{x}.$$

(b) (5 puntos) Calcular

$$\int xe^{x-1}dx, \qquad \int_0^1 3x(x^2-2x)dx.$$

Solución:

(a) El primer límite es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2x^2+4}+2$ y tomando límites encontramos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(\sqrt{2x^2+4}+2)} = \frac{1}{2}.$$

El segundo límite es la misma forma indeterminada. Aplicando la regla de L'hospital llegamos a

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+\sin x}{1} = 2.$$

(b) Tomando partes $u = x$ y $dv = e^{x-1}dx$, tal que $du = dx$ y $v = e^{x-1}$, la primera integral se transforma en

$$\int xe^{x-1}dx = uv - \int vdu = xe^{x-1} - \int e^{x-1}dx = xe^{x-1} - e^{x-1} + C.$$

La segunda integral es inmediata

$$\int_0^1 3x(x^2-2x)dx = \int_0^1 3x^3dx - \int_0^1 6x^2dx = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}.$$

$\boxed{5}$

Se considera la función $f(x) = 9x^2 - x^3$.

(a) (6 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f así como los intervalos de concavidad y convexidad de f.

(b) (4 puntos) Hallar los extremos locales y globales de f en el intervalo $I = [-1, 9]$.

Solución:

(a) f es un polinomio, luego podemos derivar f tantas veces como necesitemos.

$$f'(x) = 18x - 3x^2,$$
$$f''(x) = 18 - 6x.$$

La derivada se anula en $x = 0$ y en $x = 6$, es negativa en $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ y positiva en $(0, 6)$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ y creciente en $(0, 6)$. La derivada segunda se anula en $x = 3$, que es un punto de inflexión, puesto que $f'' > 0$ en $(-\infty, 3)$ y $f'' < 0$ en $(3, \infty)$. En consecuencia, f es convexa en $(-\infty, 3)$ y es cóncava en $(3, \infty)$.

(b) Por el apartado anterior, $x = 0$ y $x = 6$ son los único puntos críticos de f, los cuales pertenecen al intervalo I. También, por el signo de f' estudiado en ese apartado, sabemos que $x = 0$ es un mínimo local y $x = 6$ es un máximo local. Además, por el Teorema de Weierstrass, la funcón alcanza extremos globales en I. Para hallarlos, evaluamos la función en los posibles candidatos:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 9 + 1 = 10, \\ f(0) &= 0, \\ f(6) &= 9(6^2) - 6^3 = 6^2(9-6) = 108, \\ f(9) &= 9(9^2) - 9^3 = 9^3 - 9^3 = 0. \end{aligned}$$

Luego, $x = 6$ es máximo global e f en I, $x = 0$ y $x = 9$ son mínimos globales de f en I y $x = -1$ es un máximo local de f en I, ya que -1 es un punto del intervalo $(-\infty, 0)$, donde f es decreciente por el apartado aanterior.

$\boxed{6}$

(a) (6 puntos) Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = xe^{x-1}$ en el punto $x = 1$. Utilizando este resultado, dar un valor aproximado a $f(1.1)$.

(b) (4 puntos) Probar que la ecuación $x^4 + x^2 - x - 2 = 0$ tiene alguna solución positiva.

Solución:

(a) Notar que $f(1) = 1$, y de $f'(x) = (1 + x)e^{x-1}$, tenemos $f'(1) = 2$. La recta tangente es

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \equiv y - 1 = 2(x - 1) \equiv y = 2x - 1.$$

Para aproximar $f(1.1)$, utilizamos el valor dado por la recta tangente en el punto de abcisa $x = 1.1$. Tenemos

$$f(1.1) \approx 2(1.1) - 1 = 1.2.$$

Esto es lo mismo que utilizar $f(1.1) \approx f(1) + f'(1)(1.1 - 1)$.

(b) La función $f(x) = x^4 + x^2 - x - 2$ es continua en toda la recta real, pues es un polinomio. Calculamos algunos valores que creemos significativos:

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 < 0, \\ f(1) &= -1 = -\frac{1}{2} < 0, \\ f(2) &= 16 > 0. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de Bolzano, f admite una raíz en el intervalo $(1, 2)$, ya que $f(1)f(2) < 0$ y f es continua.